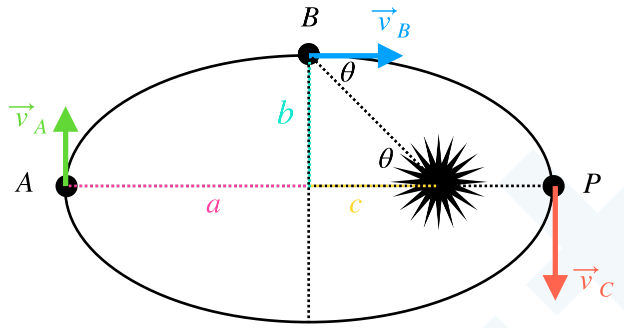
In una lontana zona della nostra Galassia un esopianeta di massa m = 5,71 x 10^24 kg descrive un'orbita ellittica attorno a una stella di massa M = 3,18 x 10^33 kg. L'eccentricità dell'orbita vale 0,368 e il suo semiasse maggiore misura 2,31 x 10^12 m. A è il punto di apoastro (massima distanza dalla stella), P è il punto di peraltro (minima distanza tra stella e pianeta) e B è uno dei due estremi del semiasse minore.

1. **Determina la velocità del pianeta quando esso si trova nei punti A, P e B.**
2. **Verifica che, nei tre punti, il momento angolare del pianeta rispetto alla stella ha sempre lo stesso valore.**



Determino la distanza focale partendo dalla definizione di eccentricità:

$$e = \frac{c}{a}, \text{ da cui:}$$

$$c = ea = 0{,}368 \times 2{,}31 \times 10^{12} m = 8{,}50 \times 10^{11} m$$

Determino ora la lunghezza del semiasse minore:

$$a^2 - b^2 = c^2, \text{ da cui:}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(2{,}31 \times 10^{12} m)^2 - (8{,}50 \times 10^{11} m)^2} = 2{,}15 \times 10^{12} m$$

Calcolo le distanze dei tre punti dalla stella:

$$r_A = a + c = (2{,}31 \times 10^{12} + 8{,}50 \times 10^{11}) m = 3{,}16 \times 10^{12} m$$

$$r_B = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2} = a = 2{,}31 \times 10^{12} m$$

$$r_P = a - c = (2{,}31 \times 10^{12} - 8{,}50 \times 10^{11}) m = 1{,}46 \times 10^{12} m$$

Essendo in un'orbita ellittica, l'energia totale del sistema è data dalla seguente formula:

$$E_{tot} = -G\frac{mM}{2a}$$

(v. https://schout.it/2022/04/04/un-pianeta-di-massa-m-esegue/)

Posso dunque esprimere l'energia cinetica come:

$$K = E_{tot} - U, \text{ in esteso:}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{mM}{2a} + G\frac{mM}{r}, \text{ da cui:}$$

$$v = \sqrt{2GM\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{r}\right)}$$

Dunque, in apoastro (A):

$$v_A = \sqrt{2GM\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{r_A}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 3{,}18 \times 10^{33}kg \times \left(-\frac{1}{2 \times 2{,}31 \times 10^{12}m} + \frac{1}{3{,}16 \times 10^{12}m}\right)} =$$

$$= 2{,}06 \times 10^5\frac{m}{s}$$

In B:

$$v_B = \sqrt{2GM\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{r_B}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 3{,}18 \times 10^{33}kg \times \left(-\frac{1}{2 \times 2{,}31 \times 10^{12}m} + \frac{1}{2{,}31 \times 10^{12}m}\right)} =$$

$$= 3{,}03 \times 10^5\frac{m}{s}$$

In periastro (P):

$$v_P = \sqrt{2GM\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{r_P}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 3{,}18 \times 10^{33}kg \times \left(-\frac{1}{2 \times 2{,}31 \times 10^{12}m} + \frac{1}{1{,}46 \times 10^{12}m}\right)} =$$

$$= 4{,}46 \times 10^5\frac{m}{s}$$

Determino ora l’angolo che c’è tra il raggio vettore e la velocità in B applicando i teoremi dei triangoli rettangoli (v. Figura iniziale: a noi interessa l’angolo θ):

$$\tan\theta = \frac{b}{c}, \text{ da cui:}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}15 \times 10^{12}m}{8{,}50 \times 10^{11}m}\right) = 68{,}42°$$

Calcolo infine i momenti angolari del pianeta rispetto alla stella nei tre punti ricordando che, in generale, vale:

$$L = rp \sin\alpha = mrv \sin\alpha$$

$$L_A = mr_Av_A \sin 90° = mr_Av_A = 5{,}71 \times 10^{24} kg \times 3{,}16 \times 10^{12} m \times 2{,}06 \times 10^5 \frac{m}{s} = 3{,}72 \times 10^{42} kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

$$L_B = mr_Bv_B \sin 68{,}42° = 5{,}71 \times 10^{24} kg \times 2{,}31 \times 10^{12} m \times 3{,}03 \times 10^5 \frac{m}{s} \times \sin 68{,}42° = 3{,}72 \times 10^{42} kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

$$L_P = mr_Pv_P \sin 90° = mr_Pv_P = 5{,}71 \times 10^{24} kg \times 1{,}46 \times 10^{12} m \times 4{,}46 \times 10^5 \frac{m}{s} = 3{,}72 \times 10^{42} kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

Ho quindi verificato che, nei tre punti, il momento angolare del pianeta rispetto alla stella ha sempre lo stesso valore.