

Un punto materiale inizialmente fermo (rispetto alla superficie terrestre) inizia a cadere partendo da un'altezza di $1,27 \times 10^7$ m rispetto al centro della Terra.

- 1. Quanto tempo impiega a percorrere una distanza di 16,0 m verso il basso?**
- 2. Qual è il valore della sua velocità finale verso il basso?**

Il punto materiale è sottoposto a un'accelerazione di gravità data dalla formula (dato lo spostamento minimo di 16 m posso considerarla costante):

$$g = \frac{GM_T}{d^2}$$

METODO 1:

Dallo studio del moto uniformemente accelerato so che vale la legge oraria:

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \text{ dato che } v_0 = 0 \text{ e imponendo che } h_0 = 0:$$

$$t = \sqrt{\frac{2h_f}{g}} = \sqrt{\frac{2hd^2}{GM_T}} = \sqrt{\frac{2 \times 16m \times (1,27 \times 10^7 m)^2}{6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5,972 \times 10^{24} kg}} = 3,60s$$

Applico ora la legge della velocità:

$$v = v_0 + gt, \text{ dato che } v_0 = 0:$$

$$v = gt = \frac{GM_T}{d^2} t = \frac{6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5,972 \times 10^{24} kg}{(1,27 \times 10^7 m)^2} \times 3,60s = 8,89 \frac{m}{s}$$

METODO 2:

Dallo studio del moto uniformemente accelerato so che vale la legge della velocità:

$$v = v_0 + gt, \text{ dato che } v_0 = 0:$$

$$v = gt, \text{ da cui: } t = \frac{v}{g} = \frac{vd^2}{GM_T} \quad (1)$$

Al di fuori dell'atmosfera terrestre, sul meteoroido non vi sono forze di tipo dissipativo, pertanto vale la conservazione dell'energia meccanica totale:

$$K_f + U_f = K_0 + U_0$$

Scrivendo le grandezze per esteso ottengo:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - G \frac{mM_T}{d-16m} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{mM_T}{d}, \text{ semplificando e ricordando che parte da fermo:}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 - G \frac{M_T}{d-16m} = -G \frac{M_T}{d}$$

Esplicito la relazione appena scritta rispetto alla velocità:

$$v = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{d-16m} - \frac{1}{d} \right)} \quad (2)$$

Sostituisco la (2) nella (1) e ottengo che:

$$t = \frac{\sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{d-16m} - \frac{1}{d} \right) d^2}}{GM_T}, \text{ mettendo tutto sotto radice:}$$

$$t = \sqrt{\frac{2GM_T \left(\frac{1}{d-16m} - \frac{1}{d} \right) d^4}{G^2 M_T^2}}, \text{ semplificando:}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{1}{d-16m} - \frac{1}{d} \right) d^4}{GM_T}} = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{1}{1,27 \times 10^7 m - 16m} - \frac{1}{1,27 \times 10^7 m} \right) (1,27 \times 10^7 m)^4}{6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5,972 \times 10^{24} kg}} = 3,60s$$

Per determinare il valore della velocità finale verso il basso del punto materiale applico la formula (2):

$$v = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{d-16m} - \frac{1}{d} \right)} =$$

$$= \sqrt{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5,972 \times 10^{24} kg \times \left(\frac{1}{1,27 \times 10^7 m - 16m} - \frac{1}{1,27 \times 10^7 m} \right)} = 8,89 \frac{m}{s}$$