

Una carica di $20,2 \mu\text{C}$ è vincolata nell'origine degli assi.

1. Se una carica di $-5,25 \mu\text{C}$ con massa $3,20 \text{ g}$, situata in quiete nel punto $(0,925 \text{ m} ; 1,17 \text{ m})$, viene lasciata libera di muoversi, qual è la sua velocità quando è a metà del suo cammino verso l'origine degli assi?
2. Supponi che la carica di $-5,25 \mu\text{C}$ sia liberata nel punto di coordinate $x = 1/2(0,925 \text{ m})$ e $y = 1/2(1,17 \text{ m})$. Quando è a metà strada rispetto all'origine degli assi, la sua velocità sarà maggiore, minore o uguale a quella calcolata nel punto a)? Giustifica la risposta.
3. Determina la velocità della carica nella situazione descritta nel punto b).

Determino la distanza della carica di $-5,25 \mu\text{C}$ dall'origine degli assi applicando il teorema di Pitagora:

$$d = \sqrt{(0,925\text{m})^2 + (1,17\text{m})^2} = 1,49\text{m}$$

So che l'energia totale di una carica elettrica si conserva, perciò:

$$K_f + U_f = K_0 + U_0, \text{ ovvero: } K_f - K_0 = U_0 - U_f,$$

$$\Delta K = - \Delta U, \text{ da cui:}$$

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) = k_0qQ \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\frac{d}{2}} \right), \text{ ovvero: } \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) = k_0qQ \left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d} \right)$$

Sapendo che parte in quiete ($v_0 = 0$) posso esplicitare la velocità finale come:

$$v_f = \sqrt{\frac{2k_0qQ}{m} \left(\frac{1}{d} - \frac{2}{d} \right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times 8,988 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \times 20,2 \times 10^{-6} \text{C} \times (-5,25 \times 10^{-6} \text{C})}{3,20 \times 10^{-3} \text{kg}} \left(\frac{1}{1,49\text{m}} - \frac{2}{1,49\text{m}} \right)} = 20,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Al diminuire della distanza l'energia potenziale aumenta in modulo, inoltre dalla formula scritta in sopra che esprime la velocità finale posso notare che, a parità di altre grandezze, vi è una relazione di proporzionalità inversa con la distanza d . Ipotizzo dunque che nel caso descritto al secondo punto la velocità aumenti.

Verifico. Determino la nuova distanza della carica di $-5,25 \mu\text{C}$ dall'origine degli assi applicando il teorema di Pitagora:

$$d_2 = \sqrt{(0,5 \times 0,925\text{m})^2 + (0,5 \times 1,17\text{m})^2} = 0,746\text{m}$$

Dunque la velocità finale in questo secondo caso è pari a:

$$v_{f_2} = \sqrt{\frac{2k_0qQ}{m} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_2} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 8,988 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \times 20,2 \times 10^{-6}C \times (-5,25 \times 10^{-6}C)}{3,20 \times 10^{-3}kg} \left(\frac{1}{0,746m} - \frac{2}{0,746m} \right)} = 28,3 \frac{m}{s}$$

L'ipotesi effettuata era perciò corretta.