Un pianeta, di forma sferica, ha massa e raggio M_p = 9,686 x 10^24 kg e R_p = 2,546 x 10^6 m, rispettivamente. Inoltre, il periodo di rotazione attorio al proprio asse è T_p = 8,0 x 10^5 s.

1. **Trascurando completamente gli attriti, che velocità minima v dovrebbe avere un proiettile di cannone per effettuare un giro attorno al pianeta?**
2. **Calcolare il raggio R dell'orbita per un satellite geostazionario di massa m = 1000 kg. Scrivere nel risultato il rapporto R/Rp.**
3. **Calcolare l'energia totale E del satellite.**
4. **Calcolare con che velocità V casca sulla superficie del pianeta un meteorite proveniente da distanza molto grande con velocità nulla.**

1. La condizione richiesta in questo primo punto è che un proiettile di cannone effettui un giro attorno al pianeta. Ciò significa che dobbiamo considerare il proiettile come se fosse un satellite del pianeta che si muove a livello della superficie. Pertanto la velocità minima v che dovrebbe avere è esprimibile tramite la formula che esprime la velocità di un satellite in orbita circolare a una distanza $r = R_p$:

$$v = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 9{,}686 \times 10^{24}kg}{2{,}546 \times 10^6 m}} = 1{,}6 \times 10^4 \frac{m}{s}$$

In alternativa si può imporre l'uguaglianza tra forza centripeta e forza gravitazionale esercitata dal pianeta sul proiettile:

$$\frac{mv^2}{R_p} = G\frac{mM_p}{R_p^2}, \text{ da cui: } v = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}}$$

2. I satelliti geostazionari hanno un periodo di rivoluzione dell'orbita che è pari a quello dei rotazione del pianeta attorno al proprio asse. Sapendo a quanto ammonta la velocità v (v. punto 1) e sfruttando le proprietà del moto circolare uniforme:

$v = \sqrt{\frac{GM_p}{R}}$ (1), ma anche $v = \frac{2\pi R}{T_p}$, dunque eguagliando i secondi membri ed elevando al quadrato:

$$\frac{GM_p}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T_p^2}, \text{ da cui: } R^3 = \frac{GM_p T_p^2}{4\pi^2}, \text{ ovvero:}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_p T_p^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 9{,}686 \times 10^{24}kg \times (8{,}0 \times 10^5 s)^2}{4\pi^2}} = 3{,}24 \times 10^{12} m$$

Si può notare come la massa del satellite non influisca sul raggio della sua orbita. Esprimendo il risultato come rapporto:

$$\frac{R}{R_p} = \sqrt[3]{\frac{GM_pT_p^2}{4\pi^2}} \times \frac{1}{R_p} = \sqrt[3]{\frac{GM_pT_p^2}{4\pi^2 R_p^3}}$$

3. Il satellite si trova ad una certa distanza R dal centro del pianeta (raggio dell'orbita) e si muove con una certa velocità v. Ciò significa che esso è dotato sia di energia cinetica sia di energia potenziale gravitazionale. Dunque l'energia totale sarà data da:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_p}{R}, \text{ sostituendo la (1):}$$

$$E = \frac{1}{2}G\frac{mM_p}{R} - G\frac{mM_p}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{mM_p}{R} = -\frac{GmM_p}{2R} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 1000kg \times 9{,}686 \times 10^{24}}{2 \times 3{,}24 \times 10^{12}m} = -9{,}98 \times 10^4 J$$

4. Dallo studio della teoria so che, nelle condizioni descritte al quarto punto (a distanza infinita energia cinetica e potenziale tendono a 0), l'energia meccanica si conserva, pertanto è necessario che energia cinetica e potenziale gravitazionale siano "uguali e opposte":

$$K = -U, \text{ da cui: } \frac{1}{2}mV^2 = G\frac{mM_p}{R_p}, \text{ ovvero:}$$

$$V = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 9{,}686 \times 10^{24}kg}{2{,}546 \times 10^6 m}} = 2{,}25 \times 10^4 \frac{m}{s}$$

E' interessante notare la seguente relazione: $V = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} = \sqrt{2}v$