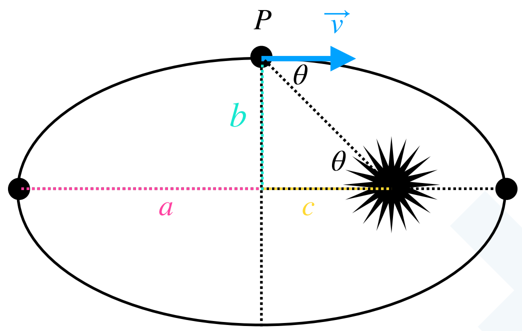
Attorno a una stella di massa M = 2,71 x 10^35 kg orbita un pianeta di massa m = 8,96 x 10^25 kg. L'ellisse descritta dal pianeta ha un semiasse maggiore lungo 5,48 x 10^13 m e una eccentricità pari a 0,412. A un certo istante il modulo della velocità del pianeta è v = 5,42 x 10^5 m/s.

1. **Calcola la distanza tra il pianeta e la stella in quel momento.**
2. **Determina, nello stesso istante, il valore dell'angolo acuto formato dalla velocità vettoriale del pianeta con raggio vettore che congiunge la stella al pianeta stesso.**



Essendo in un'orbita ellittica, l'energia totale del sistema è data dalla seguente formula:

$$E_{tot} = -G\frac{mM}{2a}$$

(v. https://schout.it/2022/04/04/un-pianeta-di-massa-m-esegue/)

Posso dunque esprimere l'energia cinetica come:

$$K = E_{tot} - U, \text{ in esteso:}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{mM}{2a} + G\frac{mM}{r}, \text{ da cui (tolgo i denominatori):}$$

$$v^2ar = -GMr + 2aGM, \text{ esplicitando rispetto a } r\text{:}$$

$$r = \frac{2aGM}{v^2a + GM} =$$

$$= \frac{2 \times 5{,}48 \times 10^{13}m \times 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 2{,}71 \times 10^{35}kg}{\left(5{,}42 \times 10^5\frac{m}{s}\right)^2 \times 5{,}48 \times 10^{13}m + 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 2{,}71 \times 10^{35}kg} = 5{,}79 \times 10^{13}m$$

Dunque, nell'istante descritto dal quesito, il pianeta si trova a una distanza $r = 5{,}79 \times 10^{13}m$.

Determino la distanza focale partendo dalla definizione di eccentricità:

$$e = \frac{c}{a}, \text{ da cui:}$$

$$c = ea = 0{,}412 \times 5{,}48 \times 10^{13}m = 2{,}26 \times 10^{13}m$$

Determino ora la lunghezza del semiasse minore:

$$a^2 - b^2 = c^2\text{, da cui:}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(5{,}48 \times 10^{13}m)^2 - (2{,}26 \times 10^{13}m)^2} = 5{,}00 \times 10^{13}m$$

Determino ora l'angolo che c'è tra il raggio vettore e la velocità applicando i teoremi dei triangoli rettangoli (v. Figura iniziale: a noi interessa l'angolo θ):

$$\tan\theta = \frac{b}{c}\text{, da cui:}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5{,}00 \times 10^{13}m}{2{,}26 \times 10^{13}m}\right) = 65{,}7^\circ$$