Due asteroidi di massa $m_1 = 4 \times 10^9$ kg e $m_2 = 2\ m_1$, si trovano in quiete a distanza molto grande l'uno dall'altro e iniziano a muoversi sotto l'effetto della forza gravitazionale. Supponi che non siano influenzati da altri corpi e determina le seguenti grandezze quando arrivano alla distanza relativa R = 6,67 x 10^3 km:

1. **L'energia cinetica totale dei due corpi;**
2. **La velocità del centro di massa dei due corpi;**
3. **Il modulo della velocità dell'asteroide di massa m1.**

So che l'energia potenziale gravitazionale dei due asteroidi è pari a:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{R} = -G\frac{2m_1^2}{R} = -6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^1} \times \frac{2 \times (4 \times 10^9 kg)^2}{6{,}67 \times 10^6 m} = -320J$$

So che l'energia meccanica totale si conserva durante il moto e so anche che, trovandosi in quiete a distanza praticamente infinita, l'energia meccanica iniziale è pari a zero:

$$E_{tot} = 0$$

Dunque:

$$E_{tot} = U + K = 0, \text{ da cui:}$$

$$K = -U = -(-320J) = 320J$$

Dal momento che, durante il moto, agisce esclusivamente la forza di interazione gravitazionale tra i due asteroidi, la quale è per definizione una forza conservativa, posso affermare che la quantità di moto totale del sistema si conserva.
Dal testo so che i due corpi sono inizialmente in quiete ($p_0 = m_1 v_0 + m_2 v_0 = 0$); vista la premessa precedente (conservazione della quantità di moto totale) ciò significa che la quantità di moto del sistema sarà sempre pari a 0. Perciò:

$$p = v_{cm}(m_1 + m_2) = 0, \text{ da cui:}$$

$$v_{cm} = 0$$

Ricavo ora la velocità del corpo 2 in funzione di quella del corpo 1 rifacendomi nuovamente alla conservazione della quantità di moto e sapendo che $p = 0$:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \text{ sapendo che } m_2 = 2m_1:$$

$$m_1 v_1 + 2m_1 v_2 = m_1(v_1 + 2v_2) = 0, \text{ da cui:}$$

$$v_2 = -\frac{v_1}{2}$$

proprietà esclusiva di MZ PLUS S.R.L.S,
Trescore Balneario (BG) via Paglia 19/D P.IVA 04537560163

Scrivo infine la formula dell'energia cinetica totale sostituendo poi la relazione che ho appena trovato:

$$K_{tot} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}2m_1\left(-\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{4}m_1v_1^2 = \frac{3}{4}m_1v_1^2$$

Sapendo che $K_{tot} = 320J$ (v. Punto 1), posso scrivere che:

$$\frac{3}{4}m_1v_1^2 = K_{tot}, \text{ da cui:}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{4K_{tot}}{3m_1}} = \sqrt{\frac{4 \times 320J}{3 \times 4 \times 10^9 kg}} = 3{,}3 \times 10^{-4}\frac{m}{s}$$

proprietà esclusiva di MZ PLUS S.R.L.S,
Trescore Balneario (BG) via Paglia 19/D P.IVA 04537560163