Un satellite artificiale della massa di 3,78 x 10^4 kg percorre attorno alla Terra un'orbita circolare che dura 10,3 h. Grazie all'azione dei razzi, esso viene poi portato su una seconda orbita circolare con una durata di 15,2 h. Calcola il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale della Terra durante il cambio di orbita del satellite (considera costante la massa del satellite).

Converto i due periodi in secondi:

$$T_1 = 10{,}3h = 10{,}3 \times 3600s = 37080s$$

$$T_2 = 15{,}2h = 15{,}2 \times 3600s = 54720s$$

Determino il raggio dell'orbita iniziale partendo dalla terza legge di Keplero applicata ai satelliti:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}, \text{ da cui:}$$

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{GM_T T_1^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 5{,}972 \times 10^{24}kg \times (37080s)^2}{4\pi^2}} = 2{,}4 \times 10^7 m$$

Procedo in maniera analoga per la seconda orbita:

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{GM_T T_2^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 5{,}972 \times 10^{24}kg \times (54720s)^2}{4\pi^2}} = 3{,}1 \times 10^7 m$$

Sapendo che, in generale, l'energia potenziale gravitazionale di un satellite rispetto alla Terra è data dalla seguente formula:

$$U = -G\frac{mM_T}{r}$$

Posso scrivere la variazione di energia potenziale gravitazionale come:

$$\Delta U = U_f - U_0 = -G\frac{mM_T}{r_2} - \left(-G\frac{mM_T}{r_1}\right) = -GmM_T\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$= -6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \times 3{,}78 \times 10^4 kg \times 5{,}972 \times 10^{24}kg \times \left(\frac{1}{3{,}1 \times 10^7 m} - \frac{1}{2{,}4 \times 10^7 m}\right) =$$

$$= 1{,}42 \times 10^{11} J$$

Sapendo che il lavoro è opposto alla variazione di energia potenziale, ho che:

$$W = -\Delta U = -1{,}42 \times 10^7 J$$