

Le molecole di anidride carbonica hanno massa $7,34 \times 10^{-26}$ kg e nell'aria di una stanza ne sono presenti un numero pari a N . Nella stanza ci sono 15°C .

1. Calcola la velocità quadratica media v delle molecole.
2. Calcola la percentuale di molecole che si muove con una velocità compresa tra v e $v + \Delta v$ con $\Delta v = 5,0$ m/s.

Determino la velocità quadratica media delle molecole applicando la relazione che la lega alla temperatura:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \times (15 + 273)\text{K}}{7,34 \times 10^{-26} \text{kg}}} = 403 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determino ora le ordinate della curva di Maxwell in corrispondenza dei due valori di velocità:

Per $v_1 = 403 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} v_1^2 e^{-\frac{mv_1^2}{2k_b T}} = \\ &= \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \times \left(\frac{7,34 \times 10^{-26} \text{kg}}{2 \times 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \times (15 + 273)\text{K}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \left(403 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \times e^{-\frac{7,34 \times 10^{-26} \text{kg} \times (403 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \times 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \times (15 + 273)\text{K}}} = \\ &= \left(2,295 \times 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) N \end{aligned}$$

Per $v_2 = \Delta v + v_1 = 408 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} v_2^2 e^{-\frac{mv_2^2}{2k_b T}} = \\ &= \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \times \left(\frac{7,34 \times 10^{-26} \text{kg}}{2 \times 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \times (15 + 273)\text{K}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \left(408 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \times e^{-\frac{7,34 \times 10^{-26} \text{kg} \times (408 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \times 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \times (15 + 273)\text{K}}} = \\ &= \left(2,266 \times 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) N \end{aligned}$$

So che il numero di molecole di anidride carbonica che hanno velocità compresa tra i due valori coincide numericamente al valore dell'area sottesa dalla curva, la quale può essere approssimata a un trapezio rettangolo:

$$\begin{aligned} N_{compresi} &= A_{trapezio} = \frac{(y_1 + y_2)(v_2 - v_1)}{2} = \\ &= \frac{(2,295 + 2,266) \times 10^{-3} \frac{s}{m} N \times (408 - 403) \frac{m}{s}}{2} = 1,1 \times 10^{-2} N \end{aligned}$$

Che, in percentuale, corrisponde a (rapporto tra molecole con velocità compresa e molecole totali):

$$\frac{N_{compresi}}{N_{tot}} = \frac{1,1 \times 10^{-2} N}{N} = 1,1 \times 10^{-2} = 1,1 \%$$